

# Technical Note

ELSENA

## スペシャリストコラム 特別号 ステップダウン型の過渡現象の解

文書管理番号: ELS1409\_S000\_20

2016年5月

株式会社エルセナ

スペシャリストコラム 特別号

ステップダウン型の過渡現象の解

目次

1-	微積分方程式からラプラス変換 .....	4
1-1	微積分方程式 .....	4
1-2	ラプラス変換.....	4
1-3	連立方程式の解 .....	5
2-	ラプラス逆変換 .....	6
3-	近似式 .....	13
	改版履歴 .....	16

この資料は、スペシャリストコラム『スイッチング方式レギュレータ～その1』の補足資料です。ステップダウン型の過渡現象について、もっと知りたい方にご覧いただく資料です。

図1(a)に示すステップダウン型レギュレータの過渡現象を求めます。(b)は2つのスイッチ( $S_1$ と $S_2$ )のオン・オフ<sup>※1</sup>のタイミングです。

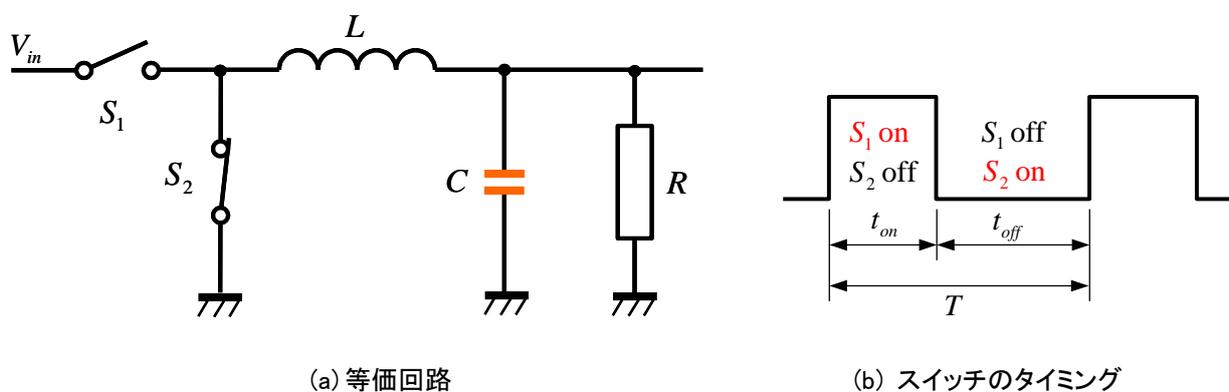


図1 ステップダウン型レギュレータ

※1 接点の用語としては、オン・オフよりもメイク・ブレイクの方がより専門的のようですが、ここではオン・オフを  
用います。

1- 微積分方程式からラプラス変換

1-1 微積分方程式

図 2 に示すように、 $S_1$  がオン、 $S_2$  がオフのときの電源からのチャージのときの電流を求めます。

網電流  $i_1, i_2$  を図 2 のように定義すると、各ループに対

して式(1) および式(2) が成り立ちます。

$$L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_2) dt + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 (i_1 - i_2) dt = V_{in} \dots\dots\dots(1)$$

$$-\frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_2) dt - \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 (i_1 - i_2) dt + Ri_2 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

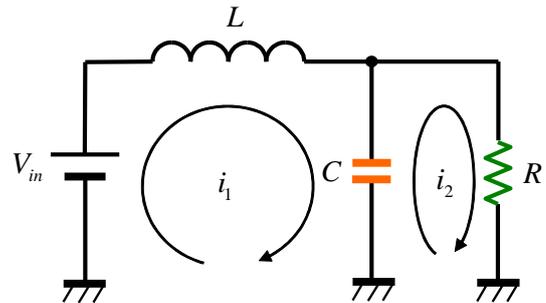


図 2 チャージの期間

1-2 ラプラス変換

過渡現象を求めるには、ラプラス変換を用います。ラプラス変換の公式の一部を表 1 に示します。一般的に、時間関数を小文字で、ラプラス変換の結果を大文字で表します。

$$sL_1 - Li_1(0) + \frac{I_1 - I_2}{sC} + \frac{v_0(0)}{s} = \frac{V_{in}}{s} \dots\dots\dots(3)$$

$$-\frac{I_1 - I_2}{sC} - \frac{v_0(0)}{s} + RI_2 = 0 \dots\dots\dots(4)$$

式(3) および式(4) の  $v_0(0)$  はキャパシタ  $C$  の端子電圧の初期値なので、 $Ri_2(0)$  です。式(3) および式(4) を  $I_1$  と  $I_2$  について整理して書き直すと、

表 1 ラプラス変換の公式

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$		

$$\left(sL_1 + \frac{1}{sC}\right)I_1 - \frac{1}{sC}I_2 = \frac{V_{in}}{s} + Li_1(0) - \frac{R}{s}i_2(0) \dots\dots\dots(5)$$

$$-\frac{1}{sC}I_1 + \left(\frac{1}{sC} + R\right)I_2 = \frac{R}{s}i_2(0) \dots\dots\dots(6)$$

となります。式(5) および式(6) は  $I_1$  と  $I_2$  に関する連立方程式で行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} sL_1 + \frac{1}{sC} & -\frac{1}{sC} \\ -\frac{1}{sC} & \frac{1}{sC} + R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_{in}}{s} + Li_1(0) - \frac{R}{s}i_2(0) \\ \frac{R}{s}i_2(0) \end{pmatrix} \dots\dots\dots(7)$$

と表します。

**1-3 連立方程式の解**

式(7) の係数の行列式は、

$$\Delta = \begin{vmatrix} sL_1 + \frac{1}{sC} & -\frac{1}{sC} \\ -\frac{1}{sC} & \frac{1}{sC} + R \end{vmatrix} = \frac{LR}{s} \left( s^2 + \frac{1}{CR}s + \frac{1}{LC} \right) \dots\dots\dots(8)$$

であり、 $I_1$  と  $I_2$  は式(9) および式(10) のように求められます。

$$I_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{V_{in}}{s} + Li_1(0) - \frac{R}{s}i_2(0) & -\frac{1}{sC} \\ \frac{R}{s}i_2(0) & \frac{1}{sC} + R \end{vmatrix} = \frac{1}{s} \frac{i_1(0)s^2 + \left\{ \frac{1}{CR}i_1(0) - \frac{R}{L}i_2(0) + \frac{1}{L}V_{in} \right\} s + \frac{1}{LCR}V_{in}}{s^2 + \frac{1}{CR}s + \frac{1}{LC}} \dots\dots\dots(9)$$

$$I_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} sL_1 + \frac{1}{sC} & \frac{V_{in}}{s} + Li_1(0) - \frac{R}{s}i_2(0) \\ -\frac{1}{sC} & \frac{R}{s}i_2(0) \end{vmatrix} = \frac{1}{s} \frac{i_2(0)s^2 + \frac{i_1(0)}{CR}s + \frac{1}{LCR}V_{in}}{s^2 + \frac{1}{CR}s + \frac{1}{LC}} \dots\dots\dots(10)$$

2- ラプラス逆変換

式(9) および式(10) を、ラプラス逆変換することによって時間応答を得ます。

ラプラス逆変換は部分分数展開して、表 1 の公式を用います。両式とも分母に  $s$  に関する 2 次式を含むので、分母が因数分解できるか否かによって、部分分数展開の方法が異なってきます。

2 次式はこれを 0 とおいたときに、(1) 実根を持たない、(2) 重根を持つ、(3) 異なる 2 根を持つ の 3 とおりに分けられます。これらは、式(9) および式(10) の右辺の分母の係数の値によります。

以下の計算は、やや煩雑で長くなります。式の変換が苦手な人は、3 つの場合に分けられることを理解した上で、次章の近似式に進んでも良いでしょう。

(1) 実根を持たない場合

式(9) および式(10) の分母を 0 とおいたときの 2 次方程式の根の判別式、

$$D = \left(\frac{1}{CR}\right)^2 - \frac{4}{LC} \dots\dots\dots (11)$$

が負のときに、2 次式は異なる 2 根を持ちます。すなわち、

$$R > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \dots\dots\dots (12)$$

のときで、分母は、

$$s^2 + \frac{1}{CR}s + \frac{1}{LC} = \left(s + \frac{1}{2CR}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2CR}\right)^2 \dots\dots\dots (13)$$

と変形されます。上式の右辺の定数項は式(11) により正なので、これを次式のように書き直します。

$$\left(s + \frac{1}{2CR}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2CR}\right)^2 = \left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega_0^2 \dots\dots\dots (14)$$

ここに、

$$\tau = 2CR \dots\dots\dots (15)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2CR}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2} \dots\dots\dots (16)$$

です。

式(17) の条件では分母は因数分解できないので、式(9) および式(10) はそのまま用いて、表 1 の公式が使えるように部分分数展開します。すなわち、恒等式を用いて、

$$I_1 = \frac{1}{s} \frac{i_1(0)s^2 + \left\{ \frac{1}{CR}i_1(0) - \frac{R}{L}i_2(0) + \frac{1}{L}V_{in} \right\} s + \frac{1}{LCR}V_{in}}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega_0^2} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B\left(s + \frac{1}{\tau}\right) + D\omega_0}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega_0^2} \dots\dots\dots (17)$$

が  $s$  の恒等式となるように、係数  $A, B, D$  を求めます。上式の中辺、右辺の分母を払います。

$$i_1(0)s^2 + \left\{ \frac{1}{CR}i_1(0) - \frac{R}{L}i_2(0) + \frac{1}{L}V_{in} \right\} s + \frac{1}{LCR}V_{in} \equiv A\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2 + A\omega_0^2 + B\left(s + \frac{1}{\tau}\right)s + D\omega_0s \dots (18)$$

上式の右辺を  $s$  について整理します。

$$A\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2 + A\omega_0^2 + B\left(s + \frac{1}{\tau}\right)s + D\omega_0s = (A+B)s^2 + \left(\frac{2}{\tau}A + \frac{1}{\tau}B + D\omega_0\right)s + \omega_0^2A \dots\dots\dots (19)$$

式(18)の左辺と、式(19)の右辺の  $s$  の次数の係数がそれぞれ等しいので、

$$A+B = i_1(0) \dots\dots\dots (20)$$

$$\left(\frac{2}{\tau}A + \frac{1}{\tau}B + D\omega_0\right) = \frac{1}{CR}i_1(0) - \frac{R}{L}i_2(0) + \frac{1}{L}V_{in} \dots\dots\dots (21)$$

$$\omega_0^2A = \frac{1}{LCR}V_{in} \dots\dots\dots (22)$$

の  $A, B, D$  についての連立方程式が成立します。まず、式(22) から、

$$A = \frac{1}{\omega_0^2 LCR}V_{in} = \frac{V_{in}}{R} \dots\dots\dots (23)$$

が求まり、これを式(20) に代入して、

$$B = i_1(0) - A = i_1(0) - \frac{V_{in}}{R} \dots\dots\dots (24)$$

となり、これらを式(21) に代入して、

$$D\omega_0 = \frac{1}{CR}i_1(0) - \frac{R}{L}i_2(0) + \frac{1}{L}V_{in} - \frac{2}{\tau} \frac{V_{in}}{R} - \frac{1}{\tau}i_1(0) + \frac{1}{\tau} \frac{V_{in}}{R} = \frac{1}{\tau}i_1(0) - \frac{R}{L}i_2(0) + \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{\tau}\right) \frac{V_{in}}{R} \dots\dots\dots (25)$$

となります。したがって、

$$I_1 = \frac{V_{in}}{R} \frac{1}{s} + \frac{\left\{ i_1(0) - \frac{V_{in}}{R} \right\} \left(s + \frac{1}{\tau}\right) + \left\{ \frac{1}{\omega_0\tau}i_1(0) - \frac{R}{\omega_0L}i_2(0) + \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{\tau}\right) \frac{V_{in}}{R} \right\} \omega_0}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega_0^2} \dots\dots\dots (26)$$

を得ます。

式(26)の右辺第1項の  $1/s$  は 1 すなわち、時刻 0 で立ち上がる振幅 1 のステップを表します。

第2項の分子に含まれる  $s+1/\tau$  は、ラプラス逆変換した時間関数に  $\exp(-t/\tau)$  を掛けることを意味します。分母は  $s^2 + \omega_0^2$  の形※2 をしているため、分子の  $s$  の次数により  $\cos$  と  $\sin$  とに分かれます。したがって、式(26) のラプラス逆変換は、

$$i_1 = \frac{V_{in}}{R} + \left[ \left\{ i_1(0) - \frac{V_{in}}{R} \right\} \cos \omega_0 t + \left\{ \frac{1}{\omega_0 \tau} i_1(0) - \frac{R}{\omega_0 L} i_2(0) + \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{R}{L} - \frac{1}{\tau} \right) \frac{V_{in}}{R} \right\} \sin \omega_0 t \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \dots\dots\dots (27)$$

となります。上式を  $i_1(0)$  および  $i_2(0)$  について整理すると、

$$i_1 = \left( \cos \omega_0 t + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 \tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} i_1(0) - \frac{R \sin \omega_0 t}{\omega_0 L} e^{-\frac{t}{\tau}} i_2(0) + \left[ 1 - \left\{ \cos \omega_0 t - \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{R}{L} - \frac{1}{\tau} \right) \sin \omega_0 t \right\} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \frac{V_{in}}{R} \dots (28)$$

$I_2$  についても同様に、

$$I_2 = \frac{1}{s} \frac{i_2(0)s^2 + \frac{i_1(0)}{CR}s + \frac{1}{LCR}V_{in}}{s^2 + \frac{1}{CR}s + \frac{1}{LC}} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B\left(s + \frac{1}{\tau}\right) + D\omega_0}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega_0^2} \dots\dots\dots (29)$$

とにおいて、

$$I_2 = \frac{V_{in}}{R} \frac{1}{s} + \frac{\left\{ i_2(0) - \frac{V_{in}}{R} \right\} \left( s + \frac{1}{\tau} \right) + \left\{ \frac{2}{\omega_0 \tau} i_1(0) - \frac{1}{\omega_0 \tau} i_2(0) - \frac{1}{\omega_0 \tau} \frac{V_{in}}{R} \right\} \omega_0}{\left( s + \frac{1}{\tau} \right)^2 + \omega_0^2} \dots\dots\dots (30)$$

を得ます。これをラプラス逆変換すると、

$$i_2 = \frac{V_{in}}{R} + \left[ \left\{ i_2(0) - \frac{V_{in}}{R} \right\} \cos \omega_0 t + \left\{ \frac{2}{\omega_0 \tau} i_1(0) - \frac{1}{\omega_0 \tau} i_2(0) - \frac{1}{\omega_0 \tau} \frac{V_{in}}{R} \right\} \sin \omega_0 t \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \dots\dots\dots (31)$$

となります。同様に、上式を  $i_1(0)$  および  $i_2(0)$  について整理すると、

$$i_2 = \frac{2 \sin \omega_0 t}{\omega_0 \tau} e^{-\frac{t}{\tau}} i_1(0) + \left( \cos \omega_0 t - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 \tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} i_2(0) + \left\{ 1 - \left( \cos \omega_0 t + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 \tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right\} \frac{V_{in}}{R} \dots\dots\dots (32)$$

を得ます。

※2 分母が  $(s+1/\tau)^2 + \omega_0^2$  のとき、分母が  $s^2 + \omega_0^2$  の関数 ( $\cos$  または  $\sin$ ) に  $\exp(-t/\tau)$  を掛ける、すなわち指数的に減衰する  $\cos$  または  $\sin$  を意味します。

図3はディスチャージ、すなわち入力電源からインダクタ  $L$  とキャパシタ  $C$  とに蓄えたエネルギーを負荷  $R$  に消費する期間です。図2と図3とを比べると、図3は図2の  $V_{in}$  を0(ゼロ)とおいたものと等価であることがわかります。

したがって、電流  $i_1$  および  $i_2$  は式(28)と式(32)において、 $V_{in} = 0$  とおくことによって求められます。すなわち、

$$i_1 = \left( \cos \omega_0 t + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 \tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} i_1(0) - \frac{R \sin \omega_0 t}{\omega_0 L} e^{-\frac{t}{\tau}} i_2(0) \dots\dots (33)$$

$$i_2 = \frac{2 \sin \omega_0 t}{\omega_0 \tau} e^{-\frac{t}{\tau}} i_1(0) + \left( \cos \omega_0 t - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 \tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} i_2(0) \dots\dots\dots (34)$$

となります。

チャージ期間の式(28)と式(32)における電流  $i_1(0)$  と  $i_2(0)$  は、ディスチャージ期間の式(33)と式(34)の  $i_1$  と  $i_2$  であり、逆に式(33)と式(34)の  $i_1(0)$  と  $i_2(0)$  は式(28)と式(32)の  $i_1$  と  $i_2$  です。最初のチャージ期間の  $i_1(0)$  と  $i_2(0)$  はいずれも0(ゼロ)なので、式(28)と式(32)、および式(33)と式(34)を順次計算することによって、電流の過渡応答を求めることができます。

この場合は、求めた結果の式(33)および式(34)が  $\sin$  と  $\cos$  を含むので、振動型といいます。

図4に振動型の計算例を示します。細かい階段状の変化を繰り返しながら、また、大きな周期の減衰型振動によって、最終値に漸近していく様子がわかります。

(2) 重根を持つ場合

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \dots\dots\dots (35)$$

のとき、式(9)および式(10)の分母は重根を持ちます。このとき、分母を次のように変形します。

$$s^2 + \frac{1}{CR} s + \frac{1}{LC} = \left( s + \frac{1}{\tau} \right)^2 \dots\dots\dots (36)$$

ここに、

$$\tau = \sqrt{LC} \dots\dots\dots (37)$$

です。

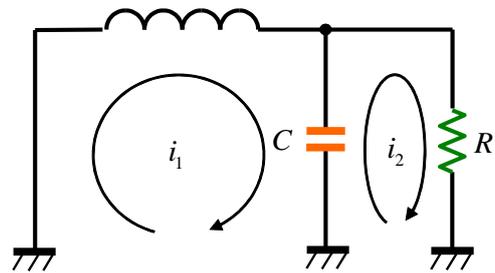


図3 ディスチャージの期間

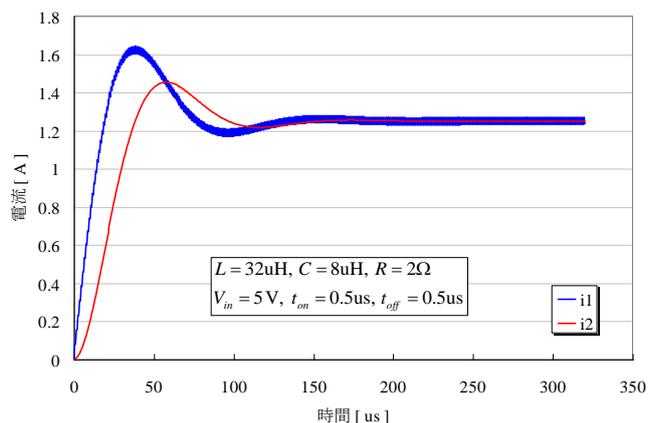


図4 振動型の過渡応答

このとき、式(9) を部分分数展開します。恒等式を用いて、

$$I_1 = \frac{1}{s} \frac{i_1(0)s^2 + \left\{ \frac{1}{CR}i_1(0) - \frac{R}{L}i_2(0) + \frac{1}{L}V_{in} \right\} s + \frac{1}{LCR}V_{in}}{s^2 + \frac{1}{CR}s + \frac{1}{LC}} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{D}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2} \dots\dots\dots (38)$$

とにおいて、前述の振動型と同様の手順で、式(38) の係数  $A, B, D$  を求めると  $I_1$  は、

$$I_1 = \frac{V_{in}}{R} \frac{1}{s} + \frac{i_1(0) - \frac{V_{in}}{R}}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{\frac{1}{\tau}i_1(0) - \frac{R}{L}i_2(0) + \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{\tau}\right)\frac{V_{in}}{R}}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2} \dots\dots\dots (39)$$

となります。

同様に  $I_2$  は、

$$I_2 = \frac{V_{in}}{R} \frac{1}{s} + \frac{i_2(0) - \frac{V_{in}}{R}}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{\frac{1}{\tau}\left\{2i_1(0) - i_2(0) - \frac{V_{in}}{R}\right\}}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2} \dots\dots\dots (40)$$

となります。式(39) および式(40) をラプラス逆変換することにより、時間関数を得ます。

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{V_{in}}{R} + \left\{ i_1(0) - \frac{V_{in}}{R} \right\} e^{-\frac{t}{\tau}} + \left\{ \frac{1}{\tau}i_1(0) - \frac{R}{L}i_2(0) + \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{\tau}\right)\frac{V_{in}}{R} \right\} t e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} i_1(0) - \frac{R}{L} t e^{-\frac{t}{\tau}} i_2(0) + \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{\tau}\right) t e^{-\frac{t}{\tau}} \right\} \frac{V_{in}}{R} \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{V_{in}}{R} + \left\{ i_2(0) - \frac{V_{in}}{R} \right\} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \left\{ 2i_1(0) - i_2(0) - \frac{V_{in}}{R} \right\} t e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{2t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} i_1(0) + \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} i_2(0) + \left\{ 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right\} \frac{V_{in}}{R} \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

この場合は、前に述べた振動型と、次で述べる減衰型の境界で臨界型といいます。ディスチャージ期間の電流は振動型と同様に、式(41) および式(42) において、 $V_{in} = 0$  とおくことによって求められます。図 5 に臨界型の計算例を示します。

(3) 異なる 2 根を持つ場合

$$R > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \dots\dots\dots (43)$$

のとき、式(9) および式(10) の分母は異なる 2 根を持ちます。このとき、分母を次のように変形します。

$$s^2 + \frac{1}{CR}s + \frac{1}{LC} = \left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) \dots\dots\dots (44)$$

ここに、

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{2CR} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \left(2R\sqrt{\frac{C}{L}}\right)^2} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{2CR} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(2R\sqrt{\frac{C}{L}}\right)^2} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

です。

このとき、式(9) を部分分数展開します。恒等式を用いて、

$$I_1 = \frac{1}{s} \frac{i_1(0)s^2 + \left\{ \frac{1}{CR}i_1(0) - \frac{R}{L}i_2(0) + \frac{1}{L}V_{in} \right\} s + \frac{1}{LCR}V_{in}}{s^2 + \frac{1}{CR}s + \frac{1}{LC}} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{\tau_1}} + \frac{D}{s + \frac{1}{\tau_2}} \dots\dots\dots (47)$$

とにおいて、前述の振動型と同様の手順で式(47) の係数  $A, B, D$  を求めると、

$$A = \frac{V_{in}}{R} \dots\dots\dots (48)$$

$$B = -\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} i_1(0) + \frac{R}{L} \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1} i_2(0) + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \left(1 - \frac{R}{L} \tau_2\right) \frac{V_{in}}{R} \dots\dots\dots (49)$$

$$D = \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} i_1(0) - \frac{R}{L} \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1} i_2(0) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \left(1 - \frac{R}{L} \tau_1\right) \frac{V_{in}}{R} \dots\dots\dots (50)$$

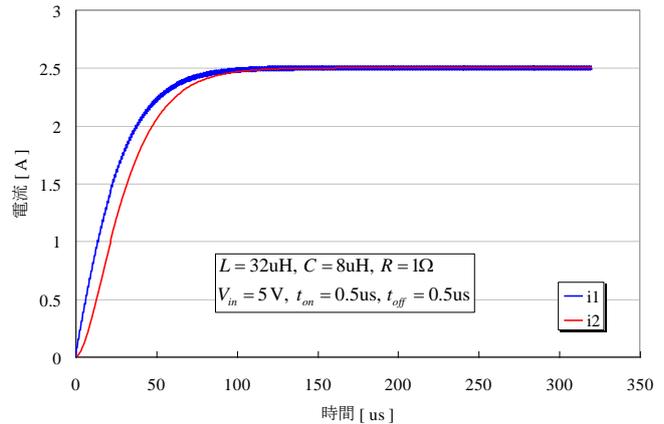


図 5 臨界型の過渡応答

となるので  $i_1$  は、

$$i_1 = -\frac{\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2 - \tau_1} i_1(0) + \frac{R}{L} \tau_1 \tau_2 \frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2 - \tau_1} i_2(0) + \left( 1 + \frac{\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2 - \tau_1} - \frac{R}{L} \tau_1 \tau_2 \frac{\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2 - \tau_1} \right) \frac{V_{in}}{R} \dots\dots\dots (51)$$

となり、同様に  $i_2$  は、

$$i_2 = -\frac{\tau_2 + \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \left( e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) i_1(0) + \frac{\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2 - \tau_1} i_2(0) + \left( 1 + \frac{\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2 - \tau_1} \right) \frac{V_{in}}{R} \dots\dots\dots (52)$$

となります。このとき、 $i_1, i_2$  はいずれも減衰する指数関数なので、減衰型といいます。ディスチャージ期間については、振動型、臨界型と同様です。図 6 に、減衰型の計算例を示します。

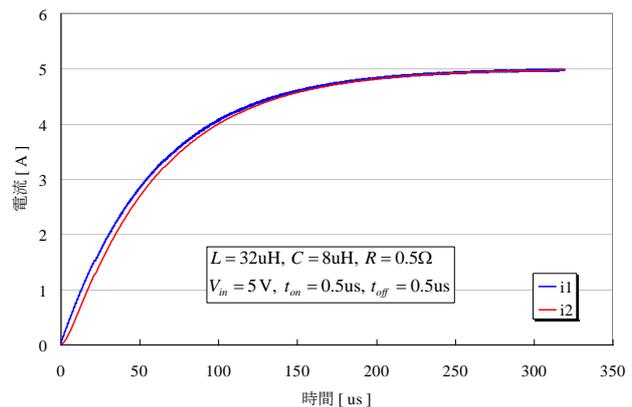


図 6 減衰型の過渡応答

3- 近似式

以上述べた 3 つの型いずれも式が少し煩雑で現象を理解しにくいので、近似式を考えます。

まず、(1) 振動型の  $i_1$  は式(28) でした。

$$i_1 = \left( \cos \omega_0 t + \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 \tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} i_1(0) - \frac{R \sin \omega_0 t}{\omega_0 L} e^{-\frac{t}{\tau}} i_2(0) + \left[ 1 - \left\{ \cos \omega_0 t - \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{R}{L} - \frac{1}{\tau} \right) \sin \omega_0 t \right\} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \frac{V_{in}}{R} \dots (28)$$

上式の時刻  $t$  はチャージ時には  $t_{on}$  で、ディスチャージ時には  $t_{off}$  です。このレギュレータの発振周期  $t_{on} + t_{off} = T$  と  $\omega_0, \tau$  の関係を、

$$\omega_0 \ll \frac{1}{T} \dots \dots \dots (53)$$

$$T \ll \tau \dots \dots \dots (54)$$

を前提とします。このとき、

$$\cos \omega_0 t \cong 1, \sin \omega_0 t \cong \omega_0 t, e^{-\frac{t}{\tau}} \cong 1 \dots \dots \dots (55)$$

と近似できます。ここで、 $t$  は  $T, t_{on}, t_{off}$  などです。このとき式(28) は、

$$i_1 \cong i_1(0) - \frac{R}{L} t i_2(0) + \frac{t}{L} V_{in} \dots \dots \dots (56)$$

と近似できるので、時刻  $t$  からチャージしたときの電流は、

$$i_1(t + t_{on}) \cong i_1(t) - \frac{R}{L} t_{on} i_2(t) + \frac{t_{on}}{L} V_{in} \dots \dots \dots (57)$$

となり、時刻  $t$  における電流は式(33) の近似により、式(58) を得ます。

$$i_1(t) \cong i_1(t - t_{off}) - \frac{R}{L} t_{off} i_2(t - t_{off}) \dots \dots \dots (58)$$

$i_2$  についても同様に式(32) を近似して、

$$i_2 \cong \frac{2t}{\tau} i_1(0) + i_2(0) \dots \dots \dots (59)$$

を得ます。時刻  $t$  からチャージしたときの電流と時刻  $t$  における電流は、

$$i_2(t + t_{on}) \cong \frac{2t_{on}}{\tau} i_1(t) + i_2(t) \dots \dots \dots (60)$$

$$i_2(t) \cong \frac{2t_{off}}{\tau} i_1(t - t_{off}) + i_2(t - t_{off}) \dots \dots \dots (61)$$

となります、ここで式(58) および式(61) を式(57) に代入して、

$$i_1(t+t_{on}) \cong i_1(t-t_{off}) - \frac{R}{L} t_{off} i_2(t-t_{off}) - \frac{R}{L} t_{on} \left\{ \frac{2t_{off}}{\tau} i_1(t-t_{off}) + i_2(t-t_{off}) \right\} + \frac{t_{on}}{L} V_{in} \dots\dots\dots (62)$$

を得ます。式(62) の  $i_1(t+t_{on}), i_2(t+t_{on})$  は時刻  $t$  からチャージ後の電流で  $i_1(t-t_{off}), i_2(t-t_{off})$  は、デイスチャージして時刻  $t$  に至った電流なので、定常状態において両者は等しくなります。これらを単に  $i_1, i_2$  とおくと、式(62) は、

$$i_1 \cong i_1 - \frac{R}{L} t_{off} i_2 - \frac{R}{L} t_{on} \left\{ \frac{2t_{off}}{\tau} i_1 + i_2 \right\} + \frac{t_{on}}{L} V_{in} \dots\dots\dots (63)$$

となり、整理して、

$$\frac{2t_{off}}{\tau} i_1 + \frac{t_{on} + t_{off}}{t_{on}} i_2 = \frac{V_{in}}{R} \dots\dots\dots (64)$$

を得ます。同様に、式(58) および式(61) を式(60) に代入すると、

$$i_2(t+t_{on}) \cong \frac{2t_{on}}{\tau} \left\{ i_1(t-t_{off}) - \frac{R}{L} t_{off} i_2(t-t_{off}) \right\} + \frac{2t_{off}}{\tau} i_1(t-t_{off}) + i_2(t-t_{off}) \dots\dots\dots (65)$$

となり、同様にして、

$$i_1 - \frac{R}{L\tau} t_{on} t_{off} i_2 = 0 \dots\dots\dots (66)$$

を得ます。式(64) および式(66) は  $i_1, i_2$  すなわち、定常状態におけるそれぞれの電流に関する式(67) の連立方程式です。

$$\begin{pmatrix} \frac{2t_{off}}{\tau} & \frac{t_{on} + t_{off}}{t_{on}} \\ 1 & \frac{R}{L\tau} t_{on} t_{off} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_{in}}{R} \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (67)$$

係数の行列式は、

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{2t_{off}}{\tau} & \frac{t_{on} + t_{off}}{t_{on}} \\ 1 & \frac{R}{L\tau} t_{on} t_{off} \end{vmatrix} = \frac{2t_{off}}{\tau} \frac{R}{L\tau} t_{on} t_{off} - \frac{t_{on} + t_{off}}{t_{on}} \dots\dots\dots (68)$$

となります。式(68) の右辺第 1 項は  $R$  の大きさにもよりますが、ほぼ無視できるので、

$$\Delta = - \frac{t_{on} + t_{off}}{t_{on}} \dots\dots\dots (69)$$

とみなしてよく、 $i_2$  は、

$$i_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2t_{off} & V_{in} \\ \tau & R \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\frac{V_{in}}{R}}{\frac{t_{on} + t_{off}}{t_{on}}} = \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} \frac{V_{in}}{R} \dots\dots\dots (70)$$

となります。したがって、出力電圧  $v_{out}$  は、

$$v_{out} = Ri_2 = \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} V_{in} \dots\dots\dots (71)$$

を得ます。

以上は振動型について述べましたが、臨界型、減衰型についても同様に近似を行うことにより、式(71) に到達できます。

**改版履歴**

Rev.	改定日	改定内容
1	2016年1月	初版
2	2016年5月	誤記訂正 誤)「2- 微積分方程式からラプラス変換」 正)「2- ラプラス逆変換」

**免責、及び、ご利用上の注意**

弊社より資料を入手されましたお客様におかれましては、下記の使用上の注意を一読いただいた上でご使用ください。

1. 本資料は非売品です。許可無く転売することや無断複製することを禁じます。
2. 本資料は予告なく変更することがあります。
3. 本資料の作成には万全を期していますが、万一ご不審な点や誤り、記載漏れなどお気づきの点がありましたら、弊社までご一報いただければ幸いです。
4. 本資料で取り扱っている回路、技術、プログラムに関して運用した結果の影響については、責任を負いかねますのであらかじめご了承ください。
5. 本資料は製品を利用する際の補助的なものとしてかかれたものです。製品をご使用になる場合は、英語版の資料もあわせてご利用ください。

**株式会社エルセナ**

ホームページ <http://www.elsena.co.jp>  
 技術情報サイト elsphear <http://www.elsena.co.jp/elspear/index.html>  
 技術情報データベース ETS <https://www.elsena.co.jp/elspear/members/index.cfm>