パルス波形のフーリエ変換

図 4 のフーリエ変換の式

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{Tt_r}\int_0^{t_r} t\,e^{-j\omega t}dt+\frac{1}{T}\int_{t_r}^{T_W} e^{-j\omega t}\,dt-\frac{1}{Tt_r}\int_{T_W}^{T_W+t_r}(t-T_W)e^{-j\omega t}\,dt \quad\cdots\cdots (1)$$

上式の右辺第 1 項の積分を部分積分により求める. $f=t$, $g'=e^{-j\omega t}$ とおくと,

$$\int te^{-j\omega t}dt=\int fg'dt=fg-\int f'gdt=-\frac{1}{j\omega}te^{-j\omega t}+\frac{1}{\omega^2}e^{-j\omega t} \quad\cdots\cdots (2)$$

となる. したがって,

$$\frac{1}{Tt_r}\int_0^{t_r} te^{-j\omega t}dt=-\frac{1}{j\omega T}e^{-j\omega t_r}+\frac{1}{\omega^2 Tt_r}\left(e^{-j\omega t_r}-1\right) \quad\cdots\cdots (3)$$

となる. 式(1)の第 2 項は,

$$\frac{1}{T}\int_{t_r}^{T_W} e^{-j\omega t}\,dt=-\frac{1}{j\omega T}\left(e^{-j\omega T_W}-e^{-j\omega t_r}\right) \quad\cdots\cdots (4)$$

となり, 同じく第 3 項は,

$$-\frac{1}{Tt_r}\int_{T_W}^{T_W+t_r}(t-T_W)e^{-j\omega t}\,dt=-\frac{1}{Tt_r}\int_{T_W}^{T_W+t_r}te^{-j\omega t}\,dt+\frac{T_W+t_r}{Tt_r}\int_{T_W}^{T_W+t_r}e^{-j\omega t}\,dt$$

となる. 上式の右辺第 1 項は, 式(3)と同様に部分積分して,

$$-\frac{1}{Tt_r}\int_{T_W}^{T_W+t_r}(t-T_W)e^{-j\omega t}\,dt=\frac{1}{j\omega T}\left\{\frac{T_W+t_r}{t_r}e^{-j\omega(T_W+t_r)}-\frac{T_W}{t_r}e^{-j\omega T_W}\right\}-\frac{1}{\omega^2 Tt_r}\left\{e^{-j\omega(T_W+t_r)}-e^{-j\omega T_W}\right\} \quad . (5)$$

となり，式(4)の右辺第 2 項は,

$$\frac{T_W + t_r}{T t_r}\int_{T_W}^{T_W + t_r} e^{-j\omega t}\, dt = -\frac{1}{j\omega T}\frac{T_W + t_r}{t_r}\left\{e^{-j\omega(T_W + t_r)} - e^{-j\omega T_W}\right\} \quad \cdots (6)$$

となる．式(3)，式(4)，式(5)および式(6)から,

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j\omega t}\, dt = -\frac{1}{j\omega T}e^{-j\omega t_r} + \frac{1}{\omega^2 T t_r}\left(e^{-j\omega t_r} - 1\right) - \frac{1}{j\omega T}\left(e^{-j\omega T_W} - e^{-j\omega t_r}\right)$$

$$+\frac{1}{j\omega T}\left\{\frac{T_W + t_r}{t_r}e^{-j\omega(T_W + t_r)} - \frac{T_W}{t_r}e^{-j\omega T_W}\right\} - \frac{1}{\omega^2 T t_r}\left\{e^{-j\omega(T_W + t_r)} - e^{-j\omega T_W}\right\}$$

$$-\frac{1}{j\omega T}\frac{T_W + t_r}{t_r}\left\{e^{-j\omega(T_W + t_r)} - e^{-j\omega T_W}\right\} \quad \cdots (7)$$

となる．式(7)を整理して,

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j\omega t}\, dt = \frac{T_W}{T}\left(\frac{1 - e^{-j\omega T_W}}{j\omega T_W}\right)\left(\frac{1 - e^{-j\omega t_r}}{j\omega t_r}\right) = \frac{T_W}{T} \times \frac{\sin\frac{\omega T_W}{2}}{\frac{\omega T_W}{2}} \times \frac{\sin\frac{\omega t_r}{2}}{\frac{\omega t_r}{2}} \times e^{-j\frac{\omega(T_W + t_r)}{2}} \quad \cdots (8)$$

を得る．ラプラス変換による方法に比べると，かなり煩雑である．

＝＝

記事 URL：https://service.macnica.co.jp/library/109705